Chapitre n^{o} 2 : nombres complexes, point de vue géométrique

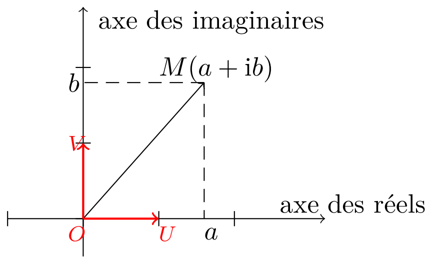
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1 Représentation graphique des complexes

Définition 1: Image d'un complexe et affixe d'un point ou d'un vecteur

Tout nombre complexe $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans le plan par :

- un unique point $M\ (a\ ;\ b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a+ib$.
- un unique vecteur $\overrightarrow{OM}\ (a\ ;\ b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a+ib$.



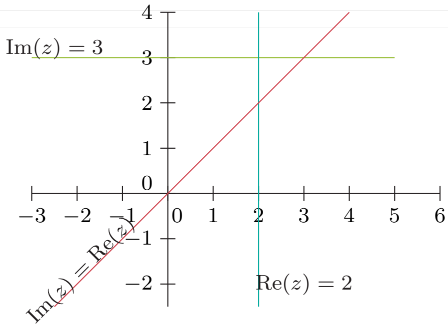
On dit que $z = a+ib$ est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On note souvent $M(z)$ ou $M(a+ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a+ib)$.

Remarque 1:

- Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Exemple 1:
Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- $\mathrm{Re}(z) = 2$
- $\mathrm{Im}(z) = 3$
- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

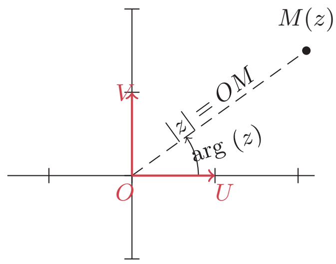


2 Module et argument d'un nombre complexe

Définition 2: Définition géométrique du module et argument d'un complexe

Soit z un complexe. M (ou $\vec{w}$) un point (ou un vecteur) d'affixe z.

- On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $||\vec{w}||$).
  Le module de z est noté $|z|$.
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ (ou $(\vec{u}, \vec{w})$).
  Un argument de z est noté $\arg\ (z)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.



Remarque 2:
$\arg\ (z)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes : si θ est une mesure de $\arg\ (z)$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est une autre mesure de $\arg\ (z)$. On notera : $\arg\ (z) = \theta\ [2\pi]$ et on dit que l'argument de z vaut θ « modulo 2π » ou « à 2π près ».

Exemple 2:

- $|\mathrm{i}| = OV = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OV}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
- Soit M_1 d'affixe -4 on a ; $|-4| = OM_1 = 4$ et $\arg(-4) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \pi$.
- Soit M_2 d'affixe $1+i$ on a :
  $|1+\mathrm{i}| = OM_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ d'après la formule des distances
  $\arg(1+\mathrm{i}) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ la diagonale du carré OUM_2V étant la bissectrice de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Méthode 1 (Déterminer un ensemble de points):
Exercice
Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z| = 3$ 2. $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Correction

① $|z| = 3 \iff OM = 3$.
Donc l'ensemble des points M tel que $|z| = 3$ est un cercle de centre O et de rayon 3.

② $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \iff \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Donc l'ensemble des points M tel que $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ est une demi-droite d'origine O, privée de O, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Théorème 1: Calcul algébrique du module et et de l'argument

Soit $z = a+ib$ un complexe. Les formules de trigonométrie du collège dans les triangles rectangles donnent :

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par : $\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$

Méthode 2 (Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe):
Déterminer le module et un argument du complexe $z = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

① On calcule d'abord le module : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

② On cherche donc $\theta = \arg(z)$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} \theta & = & \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \\ \text{ou} & & \\ \theta & = & -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Or $\sin(\theta) > 0$ donc $\arg(z) = \theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Remarque 3:

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\left(z \neq 0 \text{ et } (\arg(z) = 0\ [2\pi] \text{ ou } \arg(z) = \pi\ [2\pi])\right)$.
- z est un imaginaire pur $\iff z = 0$ ou $\left(z \neq 0 \text{ et } (\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi])\right)$.
- Attention, pour l'égalité des arguments, il faut la penser « à un multiple de 2π » près.

Définition 3: Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme
$z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$, appelée **forme trigonométrique** de z.

Remarque 4:

① Dans la forme trigonométrique, on peut remplacer θ par n'importe quelle valeur $\theta + 2k\pi$, k entier relatif.

② **ATTENTION** dans l'écriture $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ il est crucial d'avoir $r > 0$.

Par exemple : $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ n'est pas une forme trigonométrique car $-2 < 0$.

Théorème 2: Égalité de deux nombres complexes par module et argument

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

Méthode 3 (Déterminer la forme trigonométrique d'un complexe):
On considère un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$.
Pour déterminer la forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$, on reprend la méthode 2.

Exercice

Déterminer de la forme trigonométrique du complexe : $z = \frac{3}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Correction

① $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3$

② $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

On résout les équations trigonométriques ou on utilise le cercle trigonométrique. On peut prendre $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

En conclusion : $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ est une forme trigonométrique de z.

4 Module, argument et opérations avec les nombres complexes

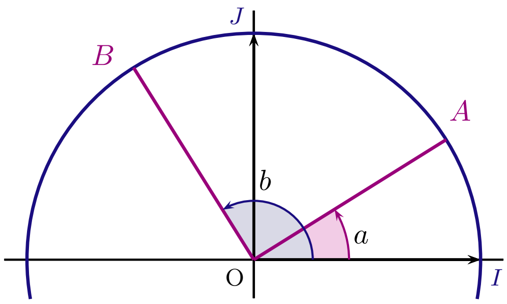
Propriété 3: Formules d'addition en trigonométrie

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x)$
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$

Preuve 1:



Démontrons la deuxième propriété, les autres en découlent en remplaçant y par $-y$, $\frac{\pi}{2}-y$, ou $\frac{\pi}{2}+y$.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et A et B les points du cercle trigonométrique associés respectivement à a et b.

On a donc $A(\cos a; \sin a)$ et $B(\cos b; \sin b)$.
D'une part $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \cos(b-a) = \cos(a-b)$
D'autre part, le repère étant orthonormé,
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
On a donc $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Dans les deux théorèmes qui suivent z et z' sont des nombres complexes.

Théorème 4: Propriétés algébriques du module et des arguments

1)	$z \times \overline{z} = \|z\|^2$	
2) opposé :	$\|-z\| = \|z\|$	$\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
3) conjugué :	$\|z\| = \|\overline{z}\|$	$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
4) produit :	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$	$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.
5) inverse :	$z \neq 0 : \left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{\|z\|}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
6)quotient :	$z' \neq 0.\ \left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$
7)puissance :	$\|z^n\| = \|z\|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$	$\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$ si $z \neq 0$.

Preuve 2:

① Définition algébrique du module ou conséquence trigonométrique de la définition géométrique du module.

② Il suffit d'utiliser la propriété de symétrie par rapport à l'origine.

③ De même avec la symétrie par rapport l'axe des ordonnées.

④ Si $z = 0$ ou $z' = 0$, alors $|zz'| = 0$ et $|z||z'| = 0$ d'où l'égalité.
Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$.
$zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta))$.
Ce qui donne d'après les formules d'addition pour sinus et cosinus :

$$zz' = rr'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')).$$

Or, $rr' > 0$ donc $|zz'| = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
Ce qui prouve bien le point 4).

⑤ z est un complexe non nul. On a $z \times \frac{1}{z} = 1$ qui donne d'une part le point précédent donne aussi $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = 1$ donc $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ et donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
D'autre part, $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(1)[2\pi]$ donne $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0[2\pi]$.

⑥ z et z' deux complexes avec $z' \neq 0$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

et si $z \neq 0$: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

⑦ Ces égalités se montrent par récurrence.

Méthode 4 (Comment utiliser les propriétés des modules et arguments):
Exercice

① $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ deux nombres complexes. Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

② Déterminer la forme algébrique de $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{2016}$.

Correction

① • $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$. Donc : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

• $\theta_1 = \arg(z_1)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$, or $\cos(\theta_1) < 0$ donc $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$\theta_2 = \arg(z_2)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\cos(\theta_2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\frac{-\pi}{3}[2\pi]$, or $\sin(\theta_2) > 0$ donc $\theta_2 = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$.

② On remarque : $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = -3z_2$ et donc :

$$|z| = 3 \times |z_2| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z_2) + \pi[2\pi] = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

$\arg\left(z^{2016}\right) = 2016 \times \arg(z) = 2016 \times \frac{2\pi}{3}[2\pi] = 672 \times 2\pi[2\pi] = 0[2\pi]$.

De plus $|z| = 1$ donc $\left|z^{2016}\right| = |z|^{2016} = 1$.

On en déduit : $z^{2016} = 1 \times (\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = 1$.

5 Applications des nombres complexes à la géométrie

Théorème 5

- Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
  $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)\ [2\pi]$.
- Soit A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
  $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$.

Preuve 3:

- Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
  Il existe un unique point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les affixes de ces deux vecteurs sont donc égales ce qui donne : $z = z_B - z_A$.
  On en déduit que $|z| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
  Donc $OM = AB = |z_B - z_A|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- Soit A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
  Par les propriétés de l'argument on a : $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$.
  $$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$
  la dernière égalité résultant de la relation de Chasles pour les angles de vecteurs.

Méthode 5 (Ensembles de points):
EXERCICE
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant la condition :

- $|z + 1 - \mathrm{i}| = 3$.
- $|z - 3| = |z + 2 + 3\mathrm{i}|$.
- $\arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{z - 1 + 2\mathrm{i}}{z + 1}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

CORRECTION

- $|z + 1 - \mathrm{i}| = 3 \iff |z - (-1 + \mathrm{i})| = 3 \iff AM = 3$ avec A point d'affixe $z_A = -1 + \mathrm{i}$.
  Donc M appartient au cercle de centre $A\,(-1\ ;\ 1)$ et de rayon 3.
- $|z - 3| = |z + 2 + 3\mathrm{i}| \iff |z - 3| = |z - (-2 - 3\mathrm{i})| \iff BM = CM$ avec B d'affixe $z_B = 3$ et C d'affixe $z_C = -2 - 3\mathrm{i}$.
  Donc M appartient à la médiatrice de $[BC]$.
- $\arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \iff \arg(z - (1 + \mathrm{i})) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \iff \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{EM}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ avec E d'affixe $z_E = 1 + \mathrm{i}$.
  Donc M appartient à la demi-droite d'origine E privé de E, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}) = \dfrac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\dfrac{z - 1 + 2\mathrm{i}}{z + 1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \left(\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{FM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ avec F d'affixe $z_F = 1 - 2\mathrm{i}$ et G d'affixe $z_G = -1$.
  Donc M appartient au cercle de diamètre $[FG]$ privé des points F et G.

Remarque 5:

① Trois points distincts sont alignés si et seulement si : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0\ [\pi]$ ce qui équivaut à :

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi] \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel non nul.

② Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$; c'est-à-dire :

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $B \neq A$ et $C \neq A \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul.

Méthode 6 (Nombres complexes et configurations géométriques):

Exercice

A, B, C trois points d'affixes respectives : $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 2 + \mathrm{i}$, $z_C = 1 - \mathrm{i}$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

Correction

$AB = |z_B - z_A| = |2 - \mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $BC = |z_C - z_B| = |-1 - 2\mathrm{i}| = |1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}$ donc ABC isocèle en B. D'autre part :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-2 + \mathrm{i}}{-1 - 2\mathrm{i}} = \frac{(-2 + \mathrm{i})(-1 + 2\mathrm{i})}{1 + 4} = -\mathrm{i}.$$

Donc $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc ABC est rectangle en B.

6 Forme exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.
$f(\theta)$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Grâce aux formules d'addition pour le sinus et le cosinus on montre que :

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta'),$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$.
Comme de plus $f(0) = 1$, on convient de noter par analogie : $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}$.

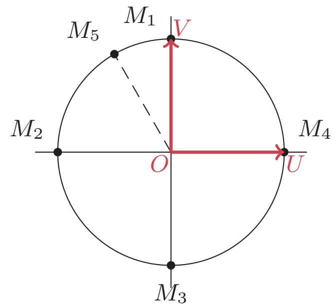
Définition 4: Écriture exponentielle des complexes de module 1

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Exemple 3:

① Placer sur le cercle trigonométrique les points M_i d'affixes z_i tels que :
$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$; $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$; $z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$; $z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.



② La forme algébrique des complexes précédents est :

$z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$;

$z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$;

$z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}$;

$z_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1$;

$z_5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Définition 5: Cas général

Tout complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.
Cette écriture est appelée « **forme exponentielle du complexe** z ».
Réciproque : Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

Remarque 6: Pour déterminer la forme exponentielle d'un complexe z, on reprend la méthode 2 pour la détermination de r et de θ.

Exemple 4:

① Déterminons la forme exponentielle de $z_1 = -2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + i$.

On peut déterminer le module et un argument par la méthode précédemment donnée mais on peut aussi opérer de la manière suivante :

$$z_1 = -2\mathrm{i} = 2(-1 + 0\mathrm{i}) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

② Déterminons la forme algébrique de $z_3 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$:

$$z_3 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Théorème 6: Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$ 2. $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1}, \quad n \in \mathbb{Z}$ 3. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}$ 4. $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Remarque 7:

- La propriété 2) s'appelle *formule de Moivre* quand on l'écrit sous la forme
$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}$$
- Les autres propriétés sont des réécritures sous forme exponentielle des propriétés 4.

Méthode 7 (Utilisation de la forme exponentielle):
Exercice

① Mettre sous forme exponentielle : $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_1^2$, $z_3 = \dfrac{2z_1}{5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

② Déterminer les entiers n tels que $(-z_1)^n$ est un nombre réel.

③ Soit $Z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$ un complexe.

a) Déterminer la forme exponentielle du complexe Z.

b) Déterminer la forme algébrique du complexe Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction

① En employant la méthode 6 on trouve $|z_1| = 2$ puis $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

On en déduit : $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\frac{2\times 5\pi}{6}} = 4i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -4\mathrm{i}$

et $z_3 = \dfrac{2\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\dfrac{4}{5}$.

② $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et donc $(-z_1)^n = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}}\right)^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-n\pi}{6}}$.

$(-z_1)^n$ est réel $\iff \frac{-n\pi}{6} = 0[\pi] \iff$ il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\frac{-n\pi}{6} = k\pi \iff 6|n$.

Donc $(-z_1)^n$ est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

③*a)* On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc

$Z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de Z.

b) $Z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2})}{8} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ est la forme algébrique de Z.

On a donc : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

D'où : $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Remarque 8:
La notation exponentielle permet de retrouver les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.

Exercice
On peut retrouver $\cos(a+b)$ en utilisant la forme exponentielle.

Correction
On a $\cos(a+b) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)})$.
Or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \cos(a)+\mathrm{i}\sin(a))(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)) = (\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\mathrm{i}(\cos(a)\sin(b)+\cos(b)\sin(a))$
Et donc : $\cos(a+b) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
On remarque que le même calcul, en utilisant cette fois la partie imaginaire, donne la formule pour $\sin(a+b)$.

7 Ensemble $\mathcal{U}$ et sous-ensembles des racines n-ièmes de l'unité

Notation 1: On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On a donc $\mathcal{U} = \{\mathrm{e}^{i\alpha}; \alpha\in]-\pi\ ;\ \pi]\} = \{z\in\mathbb{C}; |z|=1\}$.

Définition 6: Racines n-ièmes de l'unité

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle ensemble des racines n-ièmes de l'unité l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathcal{U}_n$ cet ensemble.

Propriété 7

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions complexes de $z^n = 1$ est $\mathcal{U}_n = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}; 0\leqslant k\leqslant n-1\}$.
On a $\mathrm{Card}(\mathcal{U}_n) = n$.
L'ensemble des points d'affixe une racine n-ième de l'unité est un polygone régulier à n côtés.

Preuve 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

① Notons $E_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} ; 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. On veut montrer $E_n = \mathcal{U}_n$ et $\text{Card}(\mathcal{U}_n) = n$.

a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrons que tout élément de E_n est une racine n-ième de l'unité.
$\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\frac{2k\times n\pi}{n}} = e^{2ik\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^k = 1^k = 1.$
On a montré $E_n \subset \mathcal{U}_n$ et donc $\text{Card}(\mathcal{E}_n) \leqslant \text{Card}(\mathcal{U}_n)$.

b) Soit $(k, k') \in [\![0; n-1]\!]^2$.
$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} \iff e^{i\frac{2k\pi}{n}} \times e^{i\frac{-2k'\pi}{n}} = 1 \iff e^{i\frac{2(k-k')\pi}{n}} = e^{0i} \iff \frac{2(k-k')\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$
$\iff 2\pi \times \frac{k-k'}{n} \equiv 0[2\pi] \iff \frac{k-k'}{n} \equiv 0[1] \iff k - k' \equiv 0[n]$
Or $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $-(n-1) \leqslant -k' \leqslant 0$ donc $-(n-1) \leqslant k - k' \leqslant n-1$.
Le seul multiple de n dans $[\![-(n-1) \ ; \ n-1]\!]^2$ est 0, donc $k - k' = 0$. On a montré $\text{Card}(E_n) = n$.

c) On a montré dans le chapitre 1 qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines. Donc $\text{Card}(\mathcal{U}_n) \leqslant n$.

d) Finalement $n = \text{Card}(E_n) \leqslant \text{Card}(\mathcal{U}_n) \leqslant n$ et donc toutes les inégalités larges sont des égalités.
On a donc $\text{Card}(\mathcal{U}_n) = \text{Card}(E_n)$ et $E_n \subset \mathcal{U}_n$ donc $E_n = \mathcal{U}_n$.

② Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et A_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
On veut montrer que le polygone $A_0 A_1 \ldots A_{k-1}$ est régulier.
Prenant les indices k modulo n, on a:
$\left(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} - 0}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 0}\right) \equiv e^{i\frac{\pi}{n}}[2\pi]$ ne dépend pas de k.
Les sommets A_k sont équirépartis sur le cercle trigonométrique: ils forment un polygone régulier.

Exemple 5: